Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato III

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

Nelle soluzioni del secondo tutorato c'è un errore: infatti nell'esercizio 8 il primo naturale a disposizione non è $10^6 \cdot 25 - 1$ ma $10^6 \cdot 25$.

ESERCIZIO 1.

$\circ \lim_{n\to+\infty} n+\dfrac{1}{n} = +\infty$: Osserviamo che $\forall n$ vale $n+\dfrac{1}{n} > n$. Quindi $\forall M > 0$ basta scegliere $n > M$ per soddisfare la definizione.

$\circ$ $\nexists \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$: Potendo scrivere esplicitamente la successione come {-1,1}, escludiamo che il limite possa essere un punto di $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. Allo stesso modo, notiamo che la successione è limitata e dunque non diverge. L'unica possibilità è che 1 o -1 soddisfino la definizione di limite. Ma questo è assurdo: supponiamo ad esempio che 1 sia punto limite e che N_ε che soddisfa la definizione sia $N = 2k$. Allora per $N + 1 = 2k + 1$ dovrebbe valere $|x_{N+1} - 1| < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$. Ma $x_{2k+1} = -1$ e dunque $|-1-1| = 2$ Ovviamente la definizione non è soddisfatta (si scelga $\varepsilon = 1$ ad esempio). Si ripeta lo stesso ragionamento per -1 e si otterrà che il limite non esiste.

$\circ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+4}{2n^2+3} = 1/2$: Qui basta svolgere $\dfrac{n^2+4}{2n^2+3} - \dfrac{1}{2} < \varepsilon$ e esprimere n in funzione di ε per completare l'esercizio. In particolare basta scegliere $\forall\varepsilon > 0$ un qualsiasi naturale $n > \dfrac{\sqrt{(5-6\varepsilon)\varepsilon}}{2\varepsilon}$.

$\circ \lim_{n\to+\infty}(2^n - n) = +\infty$: Notiamo che $2^n - n > 2^n - 2^{\sqrt{n}}$, $\forall n \geqslant 4$. Da cui abbiamo $2^n - 2^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}}(2^{\sqrt{n}} - 1) \geqslant 3(2^{\sqrt{n}})$. Quindi $\forall M > 0$ basta scegliere $n > max\{4, log_2(M/3)\}$.

$\circ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^{3n-1}} = 0$: Basta usare la definizione e svolgere $\dfrac{1}{3^{3n-1}} < \varepsilon$ esprimendo n in funzione di ε. Per soddisfare la definizione basterà in particolare $\forall\varepsilon > 0$ scegliere un qualsiasi naturale $n > \dfrac{1 - log_3(\varepsilon)}{3}$.

$\circ \lim_{n\to+\infty}(3\sqrt{n} - 4n) = -\infty$: Osserviamo che:

$$3\sqrt{n} - 4n < 3\sqrt{n} - 4\sqrt{n} < -M$$

Da cui abbiamo che per soddisfare la definizione $\forall M > 0$ basta scegliere un qualsiasi naturale $n > M^2$.

ESERCIZIO 2.

$\circ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$: Si useranno in questo svolgimento le proprietà dei limiti in dettaglio scrupoloso, mentre negli esercizi a seguire in alcuni passaggi si assumeranno tacitamente.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n(\frac{1}{10^n}+2)}{10^n(\frac{5}{10^n}+3)} = \frac{\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{10^n}+2)}{\lim_{n\to+\infty}(\frac{5}{10^n}+3)} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10^n} + \lim_{n\to+\infty} 2}{\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{10^n} + \lim_{n\to+\infty} 3} = \frac{2}{3}.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{|sen(n)|}{n} \qquad |sen(n)| \leqslant 1 \quad \forall n \qquad 0 \leqslant \frac{|sen(n)|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|sen(n)|}{n} = 0.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+nsen(n)}{1+n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{sen(n)}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = 1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{log(3^n+cos(3^n))}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{log(3^n(1+\frac{cos(3^n)}{3^n})}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{log(3^n)+log(1+\frac{cos(3^n)}{3^n})}{n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{log(3^n)}{n} \lim_{n\to+\infty} \frac{log(1+\frac{cos(3^n)}{3^n})}{n} = log(3).$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n(1-n)}{1+n^2} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n(n-1)}{1+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n n(1-\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = +\infty$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

$\circ \lim_{n\to+\infty}[1+(-1)^n]$: Osservando che $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ non esiste, si può dedurre che neanche il limite in questione esiste.

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot (\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1}{n^{\frac{n}{2}}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot ... \cdot (\frac{n}{2})\cdot .... \cdot 2\cdot 1}{n^{\frac{n}{2}}} = +\infty.$$

<u>Esercizio 3.</u>

$$\circ \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1})\cdot \frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}} = 0.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})\cdot \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n+2)n}}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n+2)n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n+2)n}} = +\infty.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1-cos(n))3^n+7^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n(\frac{(1-cos(n))3^n}{7^n}+1)} = \lim_{n\to+\infty} 7\cdot \sqrt[n]{\frac{(1-cos(n))3^n}{7^n}+1} = 7.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 sen(1/n)}{n^3+n^2-n+1} = \lim_{n\to+\infty} n\cdot sen\left(\frac{1}{n}\right)\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+n^2-n+1} = 1\cdot 1 = 1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 sen(1/n)}{log(n!)} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{log(n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{log(n!)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{log(n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{log(n^{\frac{n}{2}}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2})\cdot \ldots . \cdot 2\cdot 1)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n/2(log(n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot \ldots \cdot (n/2+1)) + (\frac{log((\frac{n}{2})\cdot \ldots . \cdot 2\cdot 1)}{n/2})} = 0.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{3n+2}}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

ESERCIZIO 4.

$\circ\exists\nu : 2a_n - b_n > 0 \quad \forall n > \nu$: Sì, infatti, preso $\varepsilon = 1/2$ esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che $1 - 1/2 < a_n < 1 + 1/2$ per ogni $n > \nu$. Ma allora per $n > \nu$ si ha $2a_n - b_n > 1 - 1 = 0$.

$\circ\exists \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$: No. Ad esempio, se $a_n = 1$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{2}$, la successione $a_n + b_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2}$ non ammette limite.

$\circ\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n+b_n}{n+1}$: Il limite è 1. Infatti $\dfrac{na_n + b_n}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n + \dfrac{b_n}{n+1}$. Ora, la successione $\dfrac{n}{n+1}a_n$ ha limite 1, mentre risulta $\left|\dfrac{b_n}{n+1}\right| < \dfrac{1}{n+1}$ e quindi la successione $\dfrac{b_n}{n+1}$ ha limite 0.

$\circ\exists\nu : a_n + b_n > 0 \quad \forall n > \nu$: No. Ad esempio, se si prende $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2} - 1$, si ottiene $a_n + b_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} < 0$.

ESERCIZIO 5.

$\circ(0,1)$: Come per un qualsiasi altro intervallo limitato di $\mathbb{R}$, la frontiera $Fr((0,1)) = \{0,1\}$.

$\circ\mathbb{Q}$: Applicando la definizione, poiché ogni intorno centrato in un punto di $\mathbb{Q}$ o del suo complementare, contiene elementi di entrambi gli insiemi, si può concludere che la frontiera di $\mathbb{Q}$ è proprio $\mathbb{R}$.

$\circ[5,+\infty)$: In questo caso, ediamo che solo l'estremo sinistro è punto di frontiera, quindi $Fr([5,+\infty)) = \{5\}$

$\circ \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 2\right\}$: Risolvendo la disequazione e riscrivendo l'insieme come intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ avremo che $Fr(\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 2\right\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$\circ \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$: I punti isolati sono punti di frontiera, quindi in questo caso, poiché l'insieme è costituito solamente da punti isolati, coincide con la frontiera.

$\circ(0,1) \cup (\mathbb{Q} \cap (1,2))$: Per quanto visto nel primo e nel secondo esempio abbiamo che $Fr((0,1) \cup (\mathbb{Q} \cap (1,2))) = \{0\} \cup [1,2]$.

$\circ \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$: Stavolta, oltre ai punti isolati, dovremo unire all'insieme il punto di accumulazione della successione, cioè 0, per ottenere la frontiera.